Marches aléatoires

Terminale S spécialité - Lycée Saint-Charles

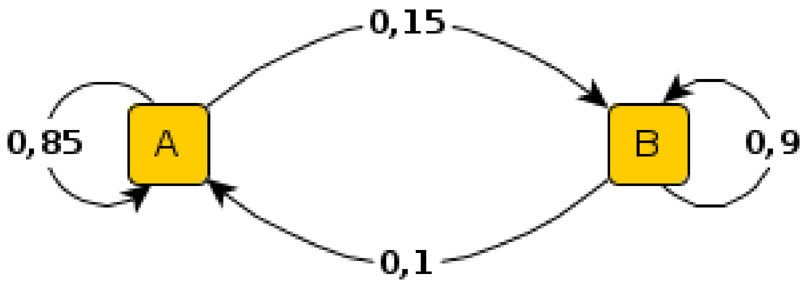
Patrice Jacquet - www.mathxy.fr - 2015-2016

1 Présentation

On considère un système qui peut se trouver soit dans un état A, soit dans un état B, et qui évolue par étapes successives, enchangeant d'état à chaque étape de façon aléatoire.

On note p la probabilité que le système passe de l'état A à l'état B.
On note q la probabilité que le système passe de l'état B à l'état A.
La probabilité que le système reste à l'état A est $1 - p$.
La probabilité que le système reste à l'état B est $1 - q$.

On représente l'évolution de ce système par un **graphe probabiliste** dont les sommets indiquent les états et les flèches indiquent les probabilités de transition.



Propriété 1

Dans un graphe probabiliste :
Tous les coefficients sont compris entre 0 et 1.
Le somme de toutes les probabilités partant d'un sommet est égale à 1.

Preuve. Ce résultat découle directement des probabilités conditionnelles.

2 Ecriture matricielle du problème

On peut reporter les probabilités de transition dans le tableau ci-dessous :

		Etat d'arrivée	
		A	**B**
Etat de départ	**A**	$1-p$	p
	B	q	$1-q$

On définit ainsi la **matrice de transition** $T = \begin{pmatrix} 1-p & p \\ q & 1-q \end{pmatrix}$

Propriété 2

Dans la matrice de transition :
Tous les coefficients sont compris entre 0 et 1.
La somme des coefficients d'une ligne vaut 1.

Preuve. Ce résultat découle de la propriété 1.

Définition 1

La matrice ligne $P_n = (a_n b_n)$ est appelée la **répartition de probabilité à l'étape *n***.

Propriété 3

Pour tout naturel n, $P_{n+1} = P_0 T^n$.

Preuve. Ce résultat se prouve simplement par récurrence.

Définition 2

On appelle **répartition stable de probabilité** une matrice ligne P, dont tous les coefficients sont positifs et de somme 1, vérifiant $P = PT$.

Propriété 4

Une marche aléatoire entre deux états a pour matrice de transition $T = \begin{pmatrix} 1-p & p \\ q & 1-q \end{pmatrix}$.
$P_n = (a_n b_n)$ est la **répartition de probabilité à l'étape *n***.
Si p et q ne sont pas tous deux nuls, ni tous deux égaux à 1, alors :
1. il existe une **répartition stable de probabilité P** et une seule :

$$P = \begin{pmatrix} \dfrac{q}{p+q} & \dfrac{p}{p+q} \end{pmatrix}$$

2. quelle que soit la répartition de probabilité initiale P_0, la suite (P_n) **converge vers P**.

Preuve. $a_{n+1} = (1-p)a_n + qb_n = (1-p)a_n + q(1-a_n) = (1-p-q)a_n + q$.
La suite (a_n) est donc une suite arithmético-géométrique, avec $-1 < 1-p-q < 1$.
Le réel c tel que $c = (1-p-q)c + q$ est $\dfrac{q}{p+q}$. La suite (a_n) a donc pour limite $\dfrac{q}{p+q}$.
On montre de la même manière que la limite de la suite (b_n) a pour limite $\dfrac{p}{p+q}$.