Matrices et suites

Terminale S spécialité - Lycée Saint-Charles

Patrice Jacquet - www.mathxy.fr - 2015-2016

1 Suites arithmético-géométiques

Définition 1

Une suite de nombres (u_n) vérifiant $u_{n+1} = au_n + b$ est dite **arithmético-géométrique** (ou à récurrence affine).

Remarque. Si une suite arithmético-géométrique vérifiant $u_{n+1} = au_n + b$ converge alors sa limite x est solution de l'équation $x = ax + b$.

Propriété 1

Soit une suite arithmético-géométrique vérifiant $u_{n+1} = au_n + b$, avec $-1 < a < 1$.
La suite (u_n) converge vers le nombre c vérifiant $c = ac + b$.

Preuve.
Soit c la solution unique de l'équation $x = ax + b$.
Soit la suite (x_n) définie par $x_n = u_n - c$, avec $c = ac + b$.
On déduit par soustraction : $u_{n+1} - c = au_n + b - ac - b$ soit $u_{n+1} - c = a(u_n - c)$ et donc $x_{n+1} = ax_n$.
La suite (x_n) est géométrique de raison a et de premier terme $u_0 - c$.
D'où pour tout entier naturel n, $x_n = x_0 \times a^n$ et donc $u_n = x_0 \times a^n + c$.
$-1 < a < 1$ donc $\lim\limits_{x \to \infty} a^n = 0$. On en déduit que la suite u_n converge vers c.

2 Suites de matrices colonnes (U_n) vérifiant $\mathrm{U}_{n+1} = \mathrm{AU}_n + \mathrm{B}$.

2.1 Convergence d'une suite de matrices

Définition 2 – Convergence d'une suite de matrices

(U_n) est une suite de matrices de format donné, L est une matrice de même format.
Dire que la suite (U_n) a pour limite L signifie que la suite des coefficients U_n a pour limite les coefficients de L.

Exemple. $U_n = \begin{pmatrix} 3 + 0,1^n \\ 5 + 0,8^n \\ 4 + 0,2^n \end{pmatrix}$, $n \in \mathbb{N}$. La suite (U_n) a pour limite la matrice $\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$

Remarque. Si une suite de matrices colonnes (U_n) vérifiant $U_{n+1} = AU_n + B$ est convergente, alors sa limite X est une matrice colonne vérifiant l'égalité $X = AX + B$.

2.2 Etude des suites de matrices colonnes vérifiant $\mathbf{U}_{n+1} = \mathbf{AU}_n + \mathbf{B}$

Propriété 2

Soit une suite de matrices colonnes (X_n) telle que pour tout $n \geqslant 0$, $X_{n+1} = AX_n$.
$X_n = A^n X_0$ pour tout $n \geqslant 0$.

Preuve. (démonstration par récurrence)
La propriété est vraie au rang $n = 0$.
On suppose la propriété vraie au rang k, c'est-à-dire $X_k = A^k X_0$
Au rang $k+1$, on a : $X_{k+1} = A \times (A^k X_0) = (A \times A^k) \times X_0 = A^{k+1} X_0$.
La propriété est vraie au rang $k+1$.
D'après le principe de récurrence, la propriété est donc vraie pour tout $n \geqslant 0$.

Propriété 3

Soit I la matrice identité de même taille qu'une matrice A.
Si la matrice $I - A$ est inversible, pour toute matrice colonne B de même taille que A, il existe **une et une seule** matrice colonne X vérifiant $X = AX + B$.

Preuve. $X = AX + B \Leftrightarrow X - AX = B \Leftrightarrow (I - A)X = B \Leftrightarrow X = (I - A)^{-1} \times B$.

Propriété 4

(propriété admise)
Soit I la matrice identité de même taille qu'une matrice A.
Dans le cas où la matrice $I - A$ n'est pas inversible, il n'existe **aucune** matrice colonne X vérifiant $X = AX + B$ **ou bien une infinité** de matrices colonne X vérifiant $X = AX + B$.

Méthode. Détermination d'une formule explicite
De $U_{n+1} = AU_n + B$ et $C = AC + B$.
L'équation $C = AC + B$ admet une unique solution : $C = (I - A)^{-1}B$.
Par soustraction : $U_{n+1} - C = A(U_n - C)$.
Posons $X_n = U_n - C$. On a donc $X_{n+1} = AX_n$.
D'après le propriété 2, on en déduit $X_n = A^n X_0$.
On en déduit $U_n - C = A^n(U_0 - C)$, d'où $Un = A^n(U_0 - C) + C$ avec $C = (I - A)^{-1}B$.