Divisibilité

Terminale S spécialité - Lycée Saint-Charles

Patrice Jacquet - www.mathxy.fr - 2015-2016

1 La relation de divisibilité dans $\mathbb{Z}$

Définition 1

Soit a et b deux entiers relatifs.
On dit que a divise b s'il existe un entier relatif k tel que $b = ka$.
On note $a|b$.

Remarque : De façon équivalente, on pourra dire que :

- b est un multiple de a
- a est un diviseur de b
- b est divisible par a

Exemple : $4|24$ car $24 = 6 \times 4$; on peut dire aussi que 24 est un multiple de 4.

2 Propriétés de la divisibilité

Propriété 1

Pour tout entier a :
1 divise a ; -1 divise a ; a divise a ; $-a$ divise a.

Preuve : Ceci résulte directement des relations : $a = 1 \times a$ et $a = (-1) \times (-a)$.

Propriété 2

Si a divise b et si b est non nul, alors $|a| \leqslant |b|$.

Preuve : $|b| = |k||a|$ et $b \neq 0$ donc $|k| \geqslant 1$ d'où $|k||a| \geqslant |a|$ et donc $|b| \geqslant |a|$.

Exemple : 7 divise -21 et $|7| \leqslant |21|$.

Propriété 3

L'ensemble des diviseurs d'un entier b non nul est fini.

Preuve : Cette propriété vient en corollaire de la propriété 2.

Propriété 4

a et b étant deux entiers quelconques :
Si $a|b$ et $b|a$, alors $a = b$ ou $a = -b$.

Preuve : D'après la propriété 2 : $|a| \leqslant |b|$ et $|b| \leqslant |a|$ donc $|a| = |b|$.

Propriété 5

a, b et c étant trois entiers quelconques :
Si $a|b$ et $b|c$, alors $a|c$.

Preuve : Il existe des entiers k et k'tels que $b = ka$ et $c = k'b$, on a donc $c = kk'a$.

Propriété 6

a, b et c étant trois entiers quelconques :
Si a divise b et a divise c, alors a divise $b + c$ et a divise $b - c$.

Preuve : Il existe des entiers k et k' tels que $b = ka$ et $c = k'a$,
on a donc $b + c = (k + k')a$ et $b - c = (k - k')a$.

Exemple : 7 divise 21 et 7 divise 49
7 divise $21 + 49 = 70$ et 7 divise $21 - 49 = -28$.

Propriété 7

a, b et c étant trois entiers quelconques :
Si a divise b, alors a divise cb pour tout entier c.

Preuve : Il existe un k tel que $b = ka$ donc $cb = (ck)a$.

Propriété 8

a, b et c étant trois entiers quelconques :
Si a divise b, alors ca divise cb pour tout entier c.

Preuve : Il existe un k tel que $b = ka$ donc $cb = kca$.

Propriété 9 – Divisibilité d'une combinaison linéaire

a, b et c étant trois entiers quelconques :
Si a divise b et a divise c alors a divise toute combinaison linéaire $mb + nc$ avec m et n entiers.

Preuve : Cette propriété résulte de l'application successive des propriétés 6 et 7.