

Equations « produit nul »

1. Rappels

définition : équation

Une équation est une égalité qui comporte une ou plusieurs inconnues

Exemple : $2x + 4 = 0$ est une équation à une inconnue (l'inconnue est x)

définition : résoudre une équation

Résoudre une équation c'est trouver toutes les valeurs des inconnues pour lesquelles l'égalité est vraie. Ces valeurs sont appelées solutions de l'équation.

Exemple : la solution de l'équation $2x + 2 = 0$ est -2 . En effet pour $x = -2$ on a bien $2x + 4 = 0$.

Propriété

Un produit est nul si et seulement si au moins un des facteurs est nul.

Soit a et b sont deux nombres.

Si $a \times b = 0$ alors $a = 0$ ou $b = 0$

Réciproquement, si $a = 0$ ou $b = 0$ alors $a \times b = 0$.

Remarques : Les nombres a et b peuvent être tous les deux nuls.

2. Equations produit nul

définition

a, b, c et d sont des nombres relatifs.

Une équation de la forme $(ax + b)(cx + d) = 0$ est une équation produit nul d'inconnue x .

Exemple : $(2x + 4)(x - 1) = 0$ est une équation produit nul d'inconnue x .

3. Méthodes de résolutions d'une équation produit nul

Exemple : résoudre l'équation $(2x + 4)(x - 1) = 0$

1) **Enoncer la propriété :**

Un produit est nul si et seulement si un des facteurs est nul

2) **Appliquer la propriété à l'équation à résoudre :**

Si $(2x + 4)(x - 1) = 0$ alors $2x + 4 = 0$ ou $x - 1 = 0$

3) **Résoudre les deux équations :**

$$2x + 4 = 0$$

$$2x = -4$$

$$x = -2$$

$$x - 1 = 0$$

$$x = 1$$

4) **Conclure :**

L'ensemble des solutions de l'équation $(2x + 4)(x - 1) = 0$ est $\{-2; 1\}$

4. Equation du type $x^2 = a$

Propriété

L'ensemble des solutions d'une équation du type $x^2 = a$ est $\{-\sqrt{a}; \sqrt{a}\}$

Preuve :

Si $x^2 = a$ alors $x^2 - a = 0$

On reconnaît une identité remarquable : $x^2 - a = x^2 - (\sqrt{a})^2 = (x + \sqrt{a})(x - \sqrt{a})$

Propriété : Un produit est nul si et seulement si un des facteurs est nul.

Si $(x + \sqrt{a})(x - \sqrt{a}) = 0$ alors $(x + \sqrt{a}) = 0$ ou $(x - \sqrt{a}) = 0$.

$$x + \sqrt{a} = 0$$

$$x = -\sqrt{a}$$

$$x - \sqrt{a} = 0$$

$$x = \sqrt{a}$$

L'ensemble des solutions de l'équation $x^2 = a$ est donc bien $\{-\sqrt{a}; \sqrt{a}\}$