

Théorème de Gauss

Terminale S spécialité - Lycée Saint-Charles

Patrice Jacquet - www.mathxy.fr - 2015-2016

1 Le théorème de Gauss

Propriété 1

Soit a , b et c sont des entiers naturels non nuls.
Si a divise bc et est premier avec b , alors a divise c .

Preuve. a et b étant premiers entre eux, d'après le théorème de Bézout, il existe des entiers u et v tels que $au + bv = 1$.

Donc $acu + bcv = c$. Or a divise acu et bcv donc a divise $acu + bcv$, c'est à dire c .

Exemple. 7 divise $12a$, comme 7 est premier avec 12, alors 7 divise a .

2 Corollaires du théorème de Gauss

Propriété 2

Si un entier naturel n est divisible par deux entiers naturels a et b premiers entre eux, alors il est divisible par leur produit.

Preuve. a divise n donc $n = ak$. b divise n donc b divise ak .

Comme b est premier avec a , b divise k donc $k = bk'$.

Finalement on a $n = abk'$ ce qui prouve que ab divise n .

Ceci s'étend à plusieurs nombres entiers premiers entre eux deux à deux.