

NOMBRES RATIONNELS ET FRACTIONS

1) Rappel : coefficient de proportionnalité

Définitions

Deux **grandeurs sont proportionnelles** lorsque les valeurs de l'une s'obtiennent en multipliant par un même nombre non nul les valeurs de l'autre.

Ce nombre est appelé **coefficient de proportionnalité**.

Exemple :

Dans le tableau de proportionnalité ci dessous, le coefficient de proportionnalité est égal à 2,5 dans un sens, et à 0,4 dans l'autre sens :

$\times 0,4$	Grandeur 1	2	4	6	8
	Grandeur 2	5	10	15	20

$\times 2,5$

Le coefficient 0,4 s'obtient en divisant la grandeurs 1 par la grandeur 2.

Par exemple : $4 \div 10 = \frac{4}{10} = 0,4$.

Le coefficient 2,5 s'obtient en divisant la grandeurs 2 par la grandeur 1.

Par exemple : $10 \div 4 = \frac{10}{4} = 2,5$.

Dans un sens on a : $\frac{2}{5} = \frac{4}{10} = \frac{6}{15} = \frac{8}{20}$ et, inversement : $\frac{5}{2} = \frac{10}{4} = \frac{15}{6} = \frac{20}{8}$.

2) Nombres rationnels

Définition : quotient

Soit a et b deux nombres, avec $b \neq 0$.

Le quotient $\frac{a}{b}$ est le nombre qui, multiplié par b , donne a .

Exemple : $5 \times \frac{2}{5} = 2$. Le nombre qui multiplié par 5 donne 2 est $\frac{2}{5}$.

Définitions

Un **nombre rationnel** est un nombre qui peut s'écrire sous forme d'un quotient.
Une **fraction** est un quotient de deux nombres entiers (si un des deux nombres n'est pas entier on parle d'**écriture fractionnaire**).
Un **pourcentage** est une écriture fractionnaire de dénominateur 100.

Exemples :

$2 = \frac{2}{1}$; $\frac{2}{5}$; $\frac{1}{3}$ sont des nombres rationnels.

$\frac{1}{3}$ est une fraction.

$\frac{0,8}{3}$ est une écriture fractionnaire.

$\frac{7}{100} = 7 \% = 0,07$ est un pourcentage.

Propriété

Deux fractions sont égales quand leurs numérateurs et dénominateurs sont proportionnels.

Preuve : Dans un tableau de proportionnalité, les valeurs d'une colonne peuvent se déduire des valeurs d'une autre colonne en multipliant par un même nombre :

Le diagramme illustre un tableau de proportionnalité à 2 lignes et 5 colonnes. Les colonnes contiennent les valeurs 2, 4, 6, 8 pour la première ligne et 5, 10, 15, 20 pour la seconde ligne. Les valeurs 6 et 15 sont en rouge. Trois cercles contiennent des facteurs de multiplication : 'x 0,4' avec une flèche pointant vers la première colonne, 'x 3' avec une flèche pointant vers la troisième colonne, et 'x 2,5' avec une flèche pointant vers la quatrième colonne.

Grandeur 1	2	4	6	8
Grandeur 2	5	10	15	20

$$6 = 2 \times 3 \text{ et } 15 = 5 \times 3 \text{ donc : } \frac{2}{5} = \frac{2 \times 3}{5 \times 3} = \frac{6}{15} .$$

$$\text{Ou encore : } \frac{4}{10} = \frac{4 \times 2}{10 \times 2} = \frac{8}{20} .$$

2) Additionner / soustraire des fractions

Règle

On additionne (ou on soustrait) des fractions ayant le même dénominateur en additionnant (ou soustrayant) les numérateurs et en gardant le dénominateur.

Exemples :

$$\frac{7}{5} + \frac{2}{5} = \frac{7+2}{5} = \frac{9}{5} \qquad \frac{4}{3} + \frac{7}{3} = \frac{11}{3} \qquad \frac{4}{8} + \frac{2}{8} + \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$$

Si les dénominateurs sont différents, faut transformer les fractions pour obtenir des

dénominateurs communs :

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{8} = \frac{1 \times 4}{2 \times 4} + \frac{1}{8} = \frac{4}{8} + \frac{1}{8} = \frac{5}{8}$$

3) Multiplier des fractions

Règle

On multiplie des fractions en multipliant les numérateurs entre eux et les dénominateurs entre eux.

Exemple : $\frac{7}{5} \times \frac{3}{4} = \frac{7 \times 3}{5 \times 4} = \frac{21}{20}$

Remarque : il est judicieux de simplifier les fractions avant d'effectuer les calculs

Exemple : $\frac{4}{15} \times \frac{25}{16} = \frac{4 \times 25}{15 \times 16} = \frac{4 \times 5 \times 5}{3 \times 5 \times 4 \times 4} = \frac{5}{3 \times 4} = \frac{5}{12}$

4) Diviser des fractions

Définition : nombres inverses

Deux nombres sont **inverses** si leur produit est égal à 1.

Exemples : L'inverse de 0,5 est 2. L'inverse de $\frac{7}{5}$ est $\frac{5}{7}$ $\left(\frac{7}{5} \times \frac{5}{7} = \frac{7 \times 5}{5 \times 7} = 1\right)$

Propriété

Diviser par un nombre revient à multiplier par l'inverse de ce nombre.

Exemple : $\frac{7}{5} \div \frac{3}{4} = \frac{7}{5} \times \frac{4}{3} = \frac{7 \times 4}{5 \times 3} = \frac{28}{15}$

qui peut aussi s'écrire : $\frac{\frac{7}{5}}{\frac{3}{4}} = \frac{7}{5} \times \frac{4}{3} = \frac{7 \times 4}{5 \times 3} = \frac{28}{15}$

remarque : on retrouve ici la notion de coefficient de proportionnalité et coefficient de proportionnalité inverse.

$\times 0,4$	Grandeur 1	2	4	6	8
	Grandeur 2	5	10	15	20

$\times 2,5$

Dans le tableau de proportionnalité ci-dessus, les deux coefficients de proportionnalité sont inverses : 0,4 est l'inverse de 2,5.

Si on multiplie une grandeur par 2,5 puis par 0,4 on revient à la valeur de départ (on a finalement multiplié la valeur de départ par 1).

Autrement dit : multiplier par 0,4 revient au même que diviser par 2,5.