Probabilités

1. Langage des probabilités

Définition : expérience aléatoire

Une **expérience** est dite **aléatoire** lorsque plusieurs résultats sont possibles mais imprévisibles.
Les résultats possibles sont généralement appelés **issues** ou **événements élémentaires**.

Exemples :

- Lancer un dé est une expérience aléatoire qui comporte six issues : {1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6}
- Jouer à pile ou face est une expérience aléatoire qui comporte deux issues : {pile ; face}

Définition : événement

Selon l'issue d'une expérience aléatoire, un **événement** est ou n'est pas réalisé.

Exemple : Soit l'expérience aléatoire qui consiste à lancer un dé.

- L'événement « le résultat est un multiple de trois » est réalisé par deux issues : 3 et 6.
- L'événement « le résultat est impair » est réalisé par trois issues : 1, 3 et 5.
- L'événement « le résultat est 7 » n'est jamais réalisé.

2. Probabilité d'un événement

Définition : probabilité

Lorsqu'on effectue un très grand nombre de fois une expérience aléatoire, la fréquence à laquelle se réalise une expérience se rapproche de la **probabilité** de cet événement.

Exemple : si on joue à pile ou face un grand nombre de fois on observe que le nombre de piles est très proche du nombre de faces. La probabilité de l'événement « obtenir face » est égale à $\frac{1}{2}$ (une chance sur deux).

Propriétés

- Une probabilité est un nombre compris entre 0 et 1.
- La probabilité d'un événement impossible est égale à 0.
- La probabilité d'un événement certain est égale à 1.
- La somme des probabilités de chaque issue est égale à 1.

Définition : équiprobabilité

Lorsque toutes les issues d'une expérience aléatoire ont la même probabilité ont dit qu'il s'agit d'une situation d'**équiprobabilité**.

Propriété

Dans une situation d'équiprobabilité, la probabilité, la probabilité d'un événement est égale au **quotient** du **nombre d'issues** qui le réalisent par le **nombre total d'issues**.

Exemple : Soit l'expérience aléatoire qui consiste à lancer un dé. L'ensemble des **six issues** de cette expérience est : { 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6}.
On note A l'événement : « le résultat est un multiple de trois ». A est réalisé par **deux issues** : 3 et 6.
La probabilité de l'événement A, notée $p(A)$ est égale à :

$$P(A) = \frac{2}{6}$$

3. Événements incompatibles

Définition :

Deux événements qui ne peuvent pas se produire en même temps sont dits incompatibles.

Propriété :

Si A et B sont deux événement incompatibles alors $p(A \textbf{ ou } B) = p(A) + p(B)$.

Exemple : Soit l'expérience aléatoire qui consiste à lancer un dé.

On note A l'événement : « le résultat est un multiple de trois ». A est réalisé par **deux issues** : 3 et 6.
On note B l'événement : « le résultat est cinq ». B est réalisé par **une issue** : 5.
On note C l'événement : « le résultat est un multiple de trois **ou** le résultat est cinq».
Comme les événements A et B sont incompatibles on a :

$$p(C) = p(A) + p(B) = \frac{2}{6} + \frac{1}{6} = \frac{3}{6}$$

Définition et propriété :

L'événement contraire d'un événement A se note « $non\ A$ » ou $\overline{A}$.
L'événement $\overline{A}$ est réalisé lorsque l'événement A n'est pas réalisé.
On a donc : $p(\overline{A}) = 1 - p(A)$

Remarque : on peut aussi écrire $p(A) + p(\overline{A}) = 1$ ou $p(A) = 1 - p(\overline{A})$

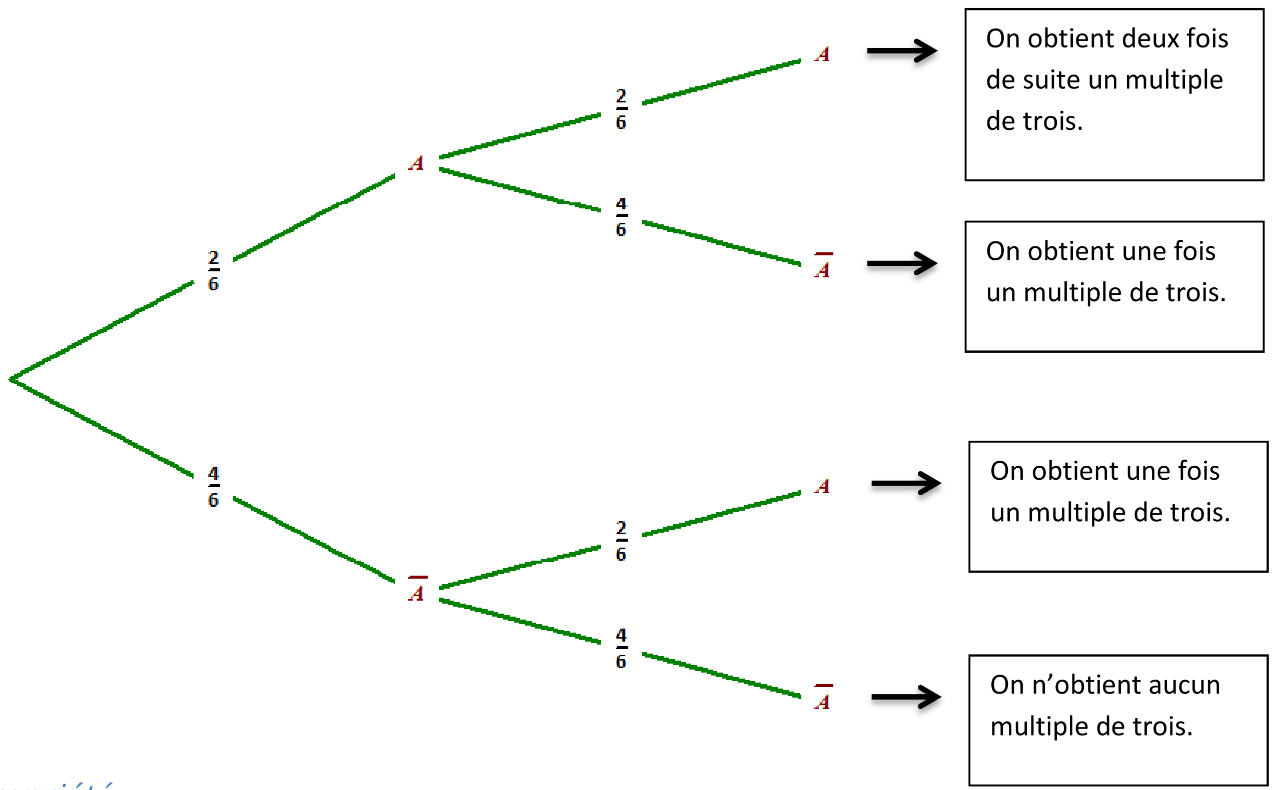
Exemple : Soit l'expérience aléatoire qui consiste à lancer un dé. On note A l'événement : « le résultat est un multiple de trois ». $\overline{A}$ est l'événement : « le résultat n'est pas un multiple de trois ».

$$P(A) = \frac{2}{6} \qquad P(\overline{A}) = 1 - \frac{2}{6} = \frac{4}{6} \qquad P(A) + p(\overline{A}) = \frac{2}{6} + \frac{4}{6} = 1$$

4. Arbres pondérés

On peut représenter une expérience aléatoire à plusieurs épreuves à l'aide d'un arbre pondéré.

Exemple : Soit l'expérience aléatoire qui consiste à lancer un dé, deux fois de suite. On note A l'événement : « le résultat est un multiple de trois ». $\overline{A}$ est l'événement : « le résultat n'est pas un multiple de trois ».



Propriété :

Dans un arbre pondéré, la probabilité d'un chemin est égale au produit des probabilités sur ce chemin.

Sur l'exemple ci-dessus

la probabilité d'obtenir deux fois un multiple de trois est :

$$\frac{2}{6} \times \frac{2}{6} = \frac{4}{36}$$

la probabilité d'obtenir une fois un multiple de trois est :

$$\left(\frac{2}{6} \times \frac{4}{6}\right) + \left(\frac{4}{6} \times \frac{2}{6}\right) = \frac{16}{36}$$

la probabilité de n'obtenir aucun multiple de trois est :

$$\frac{4}{6} \times \frac{4}{6} = \frac{16}{36}$$